

VŠB - Technická univerzita Ostrava  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Katedra aplikované matematiky

---

**Metoda homogenizace pro kompozitní materiály**

**Homogenization of composite materials**

VŠB - Technická univerzita Ostrava  
Fakulta elektrotechniky a informatiky  
Katedra aplikované matematiky

## Zadání bakalářské práce

Student: **Petr Haškovec**  
Studijní program: B2647 Informační a komunikační technologie  
Studijní obor: 1103R031 Výpočetní matematika  
Téma: **Metoda homogenizace pro kompozitní materiály**  
**Homogenization of Composite Materials**

Zásady pro vypracování:

1. Úvod do matematické teorie homogenizace.
2. Asymptotická expanze.
3. Numerické experimenty a ověření.

Seznam doporučené odborné literatury:

Doina Cioranescu, Patrizia Donato: An Introduction to Homogenization (Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, 17)

Formální náležitosti a rozsah bakalářské práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

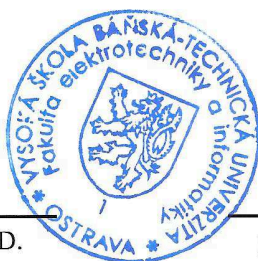
Vedoucí bakalářské práce: **doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.**

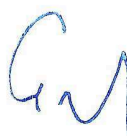
Datum zadání: 18.11.2011

Datum odevzdání: 04.05.2012



doc. RNDr. Jiří Bouchala, Ph.D.  
vedoucí katedry





prof. RNDr. Václav Snášel, CSc.  
děkan fakulty

Prohlašuji, že jsem tuto bakalářskou práci vypracoval samostatně. Uvedl jsem všechny literární prameny a publikace, ze kterých jsem čerpal.

V Ostravě 5. května

.....*Petr Hájek*.....

Rád bych zde poděkoval především vedoucímu mé bakalářské práce Doc. RNDr. Jiřímu Bouchalovi, Ph.D. za poskytnutí veškerých podkladů společně, s opakovaným vysvětlováním problematiky. Dále děkuji Ing. Alexandru Markopoulovi, Ph.D. za pomoc s praktickou částí.

A v neposlední řadě děkuji rodině a přítelkyni Terezce za podporu a trpělivost.

## Abstrakt

Tato práce se zabývá kompozitními materiály a jejich matematickým převodem na materiál homogenní stejných vlastností. Je zde zkoumáno, jakým způsobem musí být kompozit složen, aby navenek jevil vlastnosti homogenního materiálu. Problém je převeden na okrajovou úlohu rovnice vedení tepla v 1D na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ . Konkrétně je zde řešena periodická úloha, zadaná diferenciální rovnicí druhého řádu  $-(a(x) \cdot u'(x))' = f(x)$  s vhodnými okrajovými podmínkami. Řešení získáno pomocí metody konečných prvků a řešení pomocí asymptotické expanze je porovnáváno s limitním řešením. S různými funkcemi jsou hledány případy, kdy se materiál jeví jako homogenní.

**Klíčová slova:** kompozitní materiál, homogenizace, metoda konečných prvků, asymptotická expanze

This thesis deals with composite materials and their mathematical transfer to homogenic material with same nature. Is examined, how composite material is composed, to be seen as homogenic material. Problem is transform to boundary value problem of heat conduction equation in 1D on interval  $\langle 0, 1 \rangle$ . Specifically is solved periodical problem, specified with second order differential equation  $-(a(x) \cdot u'(x))' = f(x)$  with appropriate boundry value. Solution is obtained by finite element method and asymptotic expansion and is compared with limit solution. There are looked for instances, when composit is seen as homogenic matherial.

**Key words:** composite material, homogenization, finite element method, asymptotic expansion

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Úvod do problematiky</b>	<b>4</b>
2.1	Názvosloví . . . . .	4
2.2	Řešený problém . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Řešitelnost periodické okrajové úlohy</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>Úvod do matematické teorie homogenizace</b>	<b>10</b>
4.1	Zavedení úlohy . . . . .	10
4.2	Hledané řešení . . . . .	10
4.3	Značení . . . . .	11
4.4	Asymptotická expanze . . . . .	11
4.4.1	První rovnice . . . . .	13
4.4.2	Druhá rovnice . . . . .	13
4.4.3	Třetí rovnice . . . . .	15
4.4.4	Čtvrtá rovnice . . . . .	19
4.5	Shrnutí . . . . .	22
4.6	Metoda konečných prvků . . . . .	22
<b>5</b>	<b>Numerické experimenty</b>	<b>23</b>
5.1	Příklad 1 . . . . .	24
5.2	Příklad 2 . . . . .	26
5.3	Příklad 3 . . . . .	27
5.4	Příklad 4 . . . . .	29
5.5	Příklad 5 . . . . .	30

OBSAH	2
<b>6 Závěr</b>	<b>32</b>
<b>Literatura</b>	<b>33</b>
<b>Přílohy</b>	<b>34</b>

# Kapitola 1

## Úvod

Tato bakalářská práce se zabývá převodem matematického modelu kompozitního materiálu v 1D na materiál homogenní. Hledáme případy, ve kterých kompozitní materiál jeví vlastnosti homogenního materiálu. Na zjednodušeném modelu je ukázáno, jak takové hledání může probíhat, neboť analytické řešení u těchto typů úloh obvykle není možné.

Bude zde řešena periodická okrajová úloha

$$\begin{cases} -(a(x) \cdot u'(x))' = f(x) & \text{pro } x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1), \\ u'(0) = u'(1), \end{cases}$$

pomocí metody konečných prvků a asymptotické expanze.

V první části vysvětluji základní pojmy, tedy co si pod některými názvy představit a co funkce mohou představovat z fyzikálního hlediska.

Druhá část je věnována matematickému modelu.

V třetí části se zabývám odvozením postupu, jak najít řešení pomocí asymptotické expanze.

Na závěr jsou na příkladech s různými funkcemi zkoumány rozdíly mezi jednotlivými metodami.



## Kapitola 2

# Úvod do problematiky

### 2.1 Názvosloví

V této části budou vysvětleny některé pojmy, se kterými se v rámci práce setkáme. Nejedná se o definice těchto slov, ale pouze popis, pro pochopení jejich významu.

#### Homogenní materiál

Je stejnorodý materiál, který má v každém bodě stejnou (popř. podobnou) vlastnost.

#### Kompozitní materiál

Kompozitní materiál (zkráceně kompozit) je materiál ze dvou, nebo více substancí s rozdílnými vlastnostmi, které dohromady dávají výslednému výrobku nové vlastnosti, které nemá sama o sobě žádná z jeho součástí. V našem případě bude výskyt této vlastnosti popsán funkcí, tedy v daném bodě bude odpovídat funkční hodnotě.

#### Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků (MKP) je numerická metoda, převádějící úlohu na soustavu lineárních rovnic. Řešení této soustavy dává pak přibližné řešení původní úlohy. Přesnost řešení je závislá na jemnosti dělení intervalu, na kterém úlohu řešíme.

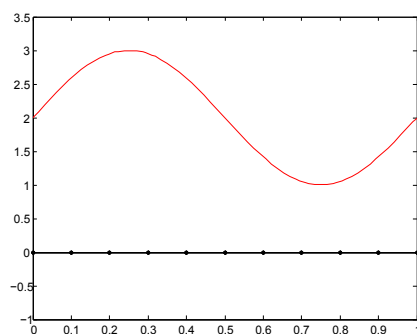
### 2.2 Řešený problém

Nyní, když máme zavedeny pojmy, popíšeme si, jakou úlohu budeme řešit a jaké informace může nést.

Představme si, že máme strunu z nějakého kompozitního materiálu.

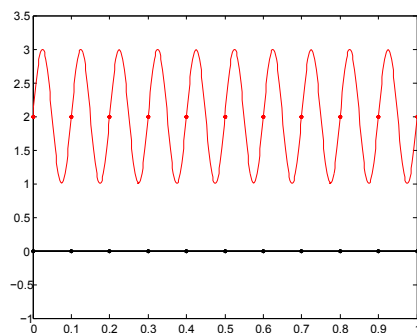
Jak jsme si již řekli výše, kompozitní materiál nemá ve všech bodech stejnou vlastnost (například tepelnou vodivost), proto ji budeme reprezentovat funkcí  $a(x)$ . Na tuto strunu bude působit nějaká funkce  $f(x)$ , která zastupuje vnější vliv sledované veličiny (např. teploty). Výsledkem má být funkce  $u(x)$ , ta představuje výslednou teplotu v průřezu struny.

Abychom mohli říct, že se kompozitní materiál jeví jako homogenní, nestačí, aby funkce  $a(x)$  popisovala strukturu na celém intervalu, jako na obrázku (2.1),



Obrázek 2.1: Neopakující se funkce  $a(x)$ .

ale periodicky se opakuje na co nejmenších intervalech, na obrázku (2.2) znázorněno 10x.



Obrázek 2.2: Opakující se funkce  $a(x)$ .

Budeme tedy řešit rovnici

$$-\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot u'(x)\right)' = f(x),$$

ke které zvolíme vhodné okrajové podmínky.

## Kapitola 3

# Řešitelnost periodické okrajové úlohy

V této kapitole zavedeme matematickou úlohu, jejímž řešením se budeme zabývat, a dokážeme podmínky řešitelnosti této úlohy.

Jedná se o periodickou okrajovou úlohu.

$$\begin{cases} -(a(x) \cdot u'(x))' = f(x) & \text{pro } x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1), \\ u'(0) = u'(1), \end{cases} \quad (3.1)$$

kde:

- $f(x) \in C(\langle 0, 1 \rangle)$
- $a(x) \in C^1(\langle 0, 1 \rangle)$ :  $\exists \bar{a} \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}; a(x) \geq \bar{a} > 0; a(0) = a(1), a'(0) = a'(1)$ .

**Definice 1.** (Klasickým řešením úlohy (3.1) rozumíme funkci  $u(x) \in C^2(\langle 0, 1 \rangle)$  takovou, že:  $\forall x \in (0, 1)$ :  $-(a(x)u'(x))' = f(x)$  a současně  $u(0) = u(1), u'(0) = u'(1)$ .

**Věta 1** (O nutné a postačující podmínce).

(i) Nechť má úloha (3.1) řešení, pak pro funkci  $f(x)$  platí:  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ .

(ii) Nechť pro funkci  $f(x)$  platí  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ , pak úloha (3.1) má řešení.

Tedy vlastnost

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

je nutnou a zároveň postačující podmínkou řešitelnosti úlohy (3.1).

Důkaz.

(i) Buď  $u(x)$  řešením (3.1).

Pak integrací  $-(a(x) \cdot u'(x))' = f(x)$ , dostáváme výraz

$$-a(x) \cdot u'(x) = \int_0^x f(S)dS + c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R},$$

po dosazení okrajových podmínek:

- pro  $x = 0$ :

$$\begin{aligned} -a(0) \cdot u'(0) &= \int_0^0 f(S)dS + c, \\ -a(0) \cdot u'(0) &= c, \end{aligned}$$

- pro  $x = 1$ :

$$-a(1) \cdot u'(1) = \int_0^1 f(S)dS + c.$$

Jelikož  $a(0) = a(1)$  a také  $u'(0) = u'(1)$ , tak platí:

$$\int_0^1 f(S)dS + c = c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R},$$

tedy

$$\int_0^1 f(S)dS = 0.$$

(i) Necht'  $\int_0^1 f(x)dx = 0$ .

Hledejme řešení  $u(x)$  úlohy (3.1). Pokusme se vyjádřit  $u(x)$  z diferenciální rovnice úlohy (3.1).

$$-a(x) \cdot u'(x) = \int_0^x f(S)dS + c, \quad \text{kde } c \in \mathbb{R},$$

$$-u'(x) = \frac{1}{a(x)} \int_0^x f(S)dS + \frac{c}{a(x)},$$

po integraci dostáváme:

$$-u(x) = \int_0^x \left[ \frac{1}{a(t)} \int_0^t f(S)dS \right] + \int_0^x \frac{c}{a(t)} dt + d, \quad \text{kde } d \in \mathbb{R}.$$

Vzhledem k zadaným okrajovým podmínkám je zřejmé, že je-li  $u(x)$  řešením úlohy, je také  $u(x) + c$  řešením. Pokusíme se proto najít řešení, splňující podmínku  $u(0) = u(1) = 0$ .

- pro  $x = 0$  platí:

$$-u(0) = \underbrace{\int_0^0 \left[ \frac{1}{a(t)} \int_0^t f(S)dS \right] dt}_0 + \underbrace{\int_0^0 \frac{c}{a(t)} dt}_0 + d,$$

odkud s využitím  $u(0) = 0$  dostáváme:

$$0 = d \tag{3.2}$$

- pro  $x = 1$  platí:

$$-u(1) = \int_0^1 \left[ \frac{1}{a(t)} \int_0^t f(S)dS \right] dt + \int_0^1 \frac{c}{a(t)} dt + 0,$$

a proto z předpokladu  $u(1) = 0$  dostáváme:

$$0 = \int_0^1 \left[ \frac{1}{a(t)} \int_0^t f(S)dS \right] + \int_0^1 \frac{c}{a(t)} dt. \tag{3.3}$$

Odtud vyjádříme konstantu  $c$ :

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \left[ \frac{1}{a(t)} \int_0^t f(S) dS \right] dt &= \int_0^1 \frac{c}{a(t)} dt, \\ - \int_0^1 \left[ \frac{1}{a(t)} \int_0^t f(S) dS \right] dt &= c \int_0^1 \frac{1}{a(t)} dt, \\ \frac{- \int_0^1 \left[ \frac{1}{a(t)} \int_0^t f(S) dS \right] dt}{\int_0^1 \frac{1}{a(t)} dt} &= c. \end{aligned}$$

Dokázali jsme, že řešení existuje a splňuje  $u(0) = u(1)$ , zbývá dokázat, že splňuje také  $u'(0) = u'(1)$ .

K tomu využijme  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ :

Zintegrujme diferenciální rovnici z (3.1)

$$\begin{aligned} - \int_0^1 (a(x) \cdot u'(x))' dx &= \int_0^1 f(x) dx, \\ - \left[ a(x) \cdot u'(x) \right]_0^1 &= 0, \\ (a(1) \cdot u'(1)) - (a(0) \cdot u'(0)) &= 0. \end{aligned}$$

Jelikož  $a(0) = a(1)$ , tak:

$$\begin{aligned} u'(1) - u'(0) &= 0, \\ u'(0) &= u'(1). \end{aligned}$$

□

Dokázali jsme, že podmínka  $\int_0^1 f(x) dx = 0$  je nutnou i postačující podmínkou řešitelnosti úlohy. A že řešení je určeno jednoznačně (až na konstantu).

## Kapitola 4

# Úvod do matematické teorie homogenizace

V následující kapitole se budeme zabývat asymptotickou expanzí.[1][2]

### 4.1 Zavedení úlohy

Uvažujme periodickou úlohu

$$\begin{cases} -\left(a\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \cdot u_{\varepsilon}'(x)\right)' = f(x) & \text{pro } x \in (0, 1), \\ u_{\varepsilon}(0) = u_{\varepsilon}(1), \\ u_{\varepsilon}'(0) = u_{\varepsilon}'(1), \end{cases} \quad (4.1)$$

kde pro jednoduchost:

- $f(x) \in C(\langle 0, 1 \rangle)$
- $a(x) \in C^1(\mathbb{R})$ , 1-periodická, a současně  $\exists \bar{a} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}: a(x) \geq \bar{a} > 0$

### 4.2 Hledané řešení

Předpokládejme, že platí nutná a postačující podmínka, tedy  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ . Pak je řešení určeno jednoznačně (až na konstantu). Najdeme řešení, pro něž platí

$$u_{\varepsilon}(0) = u_{\varepsilon}(1) = 0.$$

Hledejme řešení  $u_\varepsilon$  ve tvaru:

$$u_\varepsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon \cdot u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 \cdot u_2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \dots, \quad (4.2)$$

kde pro pevné  $x$  jsou funkce  $y \rightarrow u_i(x, y)$  1-periodické a každá funkce  $u_i(x, \frac{x}{\varepsilon})$  splňuje okrajové podmínky:

$$\begin{aligned} u_i(x, 0) &= u_i(x, 1), \\ \frac{\partial u_i}{\partial y}(x, 0) &= \frac{\partial u_i}{\partial y}(x, 1). \end{aligned}$$

Hledáme předpisy pro funkce  $u_0(x, \frac{x}{\varepsilon})$ ,  $u_1(x, \frac{x}{\varepsilon})$ ,  $u_2(x, \frac{x}{\varepsilon})$ ,  $\dots$

### 4.3 Značení

Pro zjednodušení zápisů zavedme následující značení:

Je-li  $\Psi: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  hladká funkce, platí pro derivaci funkce

$$h(x) := \Psi\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (4.3)$$

vztah

$$h'(x) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial y}\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{\partial \Psi}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \Psi}{\partial y}(x, y), \quad \text{kde } y = \frac{x}{\varepsilon}. \quad (4.4)$$

Pokud nebude řečeno jinak, v této práci uvažujeme vždy  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ .

### 4.4 Asymptotická expanze

Nyní budeme chtít dosadit  $u_\varepsilon$  ve tvaru (4.2) do diferenciální rovnice v (4.1).

Derivace (4.2) pomocí vzorce (4.4) vyjádříme takto:

$$\begin{aligned} (u_\varepsilon(x))' &= \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, y) + \\ &+ \varepsilon \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + 1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) + \\ &+ \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, y) + \varepsilon \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) + \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

Upravme levou stranu (4.1) pomocí vzorce (4.4). (Opět  $y = \frac{x}{\varepsilon}$ ).

$$-(a(y) \cdot u'_\varepsilon(x))' = -\left[ \frac{\partial}{\partial x}(a(y)u'_\varepsilon(x)) + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial y}(a(y)u'_\varepsilon(x)) \right] = f(x), \quad (4.6)$$



a dosadíme (4.5) do (4.6)

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, y) + \varepsilon \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) + \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, y) + \varepsilon \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) + \dots \right) \right) - \\
& -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \left( \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, y) + \varepsilon \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + 1 \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) + \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, y) + \varepsilon \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) + \dots \right) \right) = \\
& = f(x)
\end{aligned}$$

Seřídíme nyní levou stranu podle mocnin čísla  $\varepsilon$ , přičemž si rovnou všimněme, že některé výrazy se opakují nebo jsou si velice podobné, proto si je vhodně označme.

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\varepsilon^2} \cdot \underbrace{\left[ -\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, y) \right) \right]}_{A_0(u_0)} + \\
& + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \underbrace{\left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, y) \right) \right]}_{A_1(u_0)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) \right)}_{A_0(u_1)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) \right)}_{A_0(u_1)} + \\
& + \varepsilon^0 \cdot \underbrace{\left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) \right) \right]}_{A_2(u_0)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) \right)}_{A_1(u_1)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) \right)}_{A_1(u_1)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) \right)}_{A_0(u_2)} + \\
& + \varepsilon \cdot \underbrace{\left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) \right) \right]}_{A_2(u_1)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) \right)}_{A_1(u_2)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, y) \right)}_{A_1(u_2)} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_3}{\partial x}(x, y) \right)}_{A_0(u_3)} + \\
& + \varepsilon^2 \cdot [\dots] + \dots = f(x).
\end{aligned}$$

Tato rovnost bude splněna, pokud najdeme funkce  $u_0(x, y)$ ,  $u_1(x, y)$ ,  $u_2(x, y)$ , ... takové, aby

$$A_0(u_0) = 0 \quad (4.7)$$

$$A_1(u_0) + A_0(u_1) = 0 \quad (4.8)$$

$$A_2(u_0) + A_1(u_1) + A_0(u_2) = f(x) \quad (4.9)$$

$$A_2(u_1) + A_1(u_2) + A_0(u_3) = 0 \quad (4.10)$$

$\vdots$

#### 4.4.1 První rovnice

Hledejme řešení  $u_0$  (4.7), tj. funkci  $u_0(x, y)$ , pro níž

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, y) \right) = 0, \\ u_0(x, 0) = u_0(x, 1), \\ \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, 1). \end{cases}$$

Víme, že  $y$  je proměnná této rovnice a  $x$  je parametr. Nutná a postačující podmínka (tedy  $\int_0^1 0 \, dy = 0$ ) je splněna. Je zřejmé, že jedno z možných řešení je konstantní funkce  $u_0(x, y) = 0$ , která může být posunuta o konstantu (která je závislá na parametru  $x$ ), proto

$$u_0(x, y) = u_0(x). \quad (4.11)$$

#### 4.4.2 Druhá rovnice

V následující sekci se pomocí (4.8) pokusme získat  $u_1(x, y)$ , řešíme tedy

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial y}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) \right), \\ u_1(x, 0) = u_1(x, 1), \\ \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, 1). \end{cases} \quad (4.12)$$

S využitím (4.11) z předchozí kapitoly, díky čemuž

$$\frac{\partial u_0}{\partial y}(x, y) = 0,$$

můžeme tedy (4.12) zapsat v zjednodušeném tvaru

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right), \\ u_1(x, 0) = u_1(x, 1), \\ \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, 1). \end{cases}$$

Pravou stranu diferenciální rovnice můžeme přepsat do tvaru

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial a(y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_0(x)}{\partial x}. \quad (4.13)$$

Proměnná  $x$  opět vystupuje v roli parametru. Platnosti nutné a postačující podmínky

$$\int_0^1 \frac{\partial a(y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} dy = 0 \text{ je zaručena vlastností funkce } a(y).$$

Pro připomenutí:  $a(y)$  je 1-periodická a proto

$$\int_0^1 \frac{\partial a(y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} dy = \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \int_0^1 \frac{\partial a(y)}{\partial y} dy = \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} [a(y)]_0^1 = \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} (\underbrace{a(1) - a(0)}_{=0}) = 0,$$

víme tedy, že řešení existuje jednoznačně (až na „konstantu“ - funkci proměnné  $x$ ).

Zkusme najít řešení  $u_1(x, y)$  ve tvaru

$$u_1(x, y) = -\frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \cdot \chi(y), \quad (4.14)$$

kde

$$\begin{aligned} \chi(0) &= \chi(1), \\ \chi'(0) &= \chi'(1). \end{aligned}$$

Dosadíme (4.14) do (4.13)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x} \cdot \chi'(y) \right) = \frac{\partial a(y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x}.$$

Výraz  $\frac{\partial u_0}{\partial x}$  můžeme zkrátit, získáme tak rovnici závislou pouze na  $y$

$$\left( a(y) \cdot \chi'(y) \right)' = a'(y),$$

po integraci můžeme vyjádřit  $\chi'(y)$

$$\chi'(y) = 1 + \frac{c}{a(y)}, \quad c \in \mathbb{R}. \quad (4.15)$$

Vyjádříme nyní  $\chi(y)$

$$\chi(y) = y + \int_0^y \frac{c}{a(t)} dt + d, \quad d \in \mathbb{R}, \quad (4.16)$$

a dosadíme do (4.14):

$$u_1(x, y) = -u'_0(x) \cdot \left( y + \int_0^y \frac{c}{a(t)} dt + d \right) + \tilde{\varphi}(x), \quad d \in \mathbb{R},$$

kde  $\tilde{\varphi}(x)$  je zmiňovaná konstanta. Upravme:

$$u_1(x, y) = -u'_0(x) \cdot \left( y + \int_0^y \frac{c}{a(t)} dt \right) \underbrace{-u'_0(x) \cdot d + \tilde{\varphi}(x)}_{\varphi(x)}$$

Můžeme zvolit  $d = 0$ , takže:

$$\begin{aligned}\chi(y) &= y + \int_0^y \frac{c}{a(t)} dt, \\ \varphi(x) &= \tilde{\varphi}(x),\end{aligned}$$

dostáváme tak:

$$u_1(x, y) = -u'_0(x) \cdot \chi(y) + \varphi(x). \quad (4.17)$$

V této fázi neznáme ještě  $\varphi(x)$  (vyjádření  $\varphi$  viz sekce (4.4.4)), ale můžeme vyjádřit  $c$ :

$u_1(x, y)$  je v  $y$  1-periodické, proto

$$\begin{aligned}u_1(x, 0) &= u_1(x, 1) \\ \Downarrow \\ \chi(0) &= \chi(1) \\ \Downarrow \\ 0 &= 1 + \int_0^1 \frac{c}{a(t)} dt \\ \Downarrow \\ c &= -\frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{a(t)} dt}.\end{aligned}$$

#### 4.4.3 Třetí rovnice

Pracujme nyní s rovnicí (4.9) s neznámou  $u_2(x, y)$ .

$$A_0(u_2) = f(x) - A_1(u_1) - A_2(u_0),$$

tedy

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) \right) = f(x) + \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right).$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) \right) = f(x) + \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_0(x)}{\partial x} \right), \\ u_2(x, 0) = u_2(x, 1), \\ \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, 0) = \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, 1). \end{cases}$$

Nejprve se zabývejme nutnou a postačující podmínku

$$\int_0^1 \left[ f(x) - A_1(u_1) - A_2(u_0) \right] dy = 0,$$

neboli

$$\int_0^1 f(x) dy + \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) \right) \right] dy + \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) \right) \right] dy + \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x}(x, y) \right) \right] dy = 0.$$

Dosaďme ze vztahů (4.11) a (4.17)

$$\int_0^1 f(x) dy + \int_0^1 \left[ a(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( -u_0'(x) \cdot \chi'(y) \right) \right] dy + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \cdot \left( -u_0''(x) \cdot \chi(y) + \varphi'(x) \right) \right] dy + \int_0^1 \left[ a(y) \cdot u_0''(x) \right] dy = 0.$$

Odtud:

$$f(x) - u_0''(x) \int_0^1 a(y) \cdot \chi'(y) dy - \overbrace{u_0''(x) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \chi(y) \right) dy}^{=0} + \overbrace{\varphi'(x) \cdot \int_0^1 \frac{\partial a(y)}{\partial y} dy}^{=0} + u_0''(x) \int_0^1 a(y) dy = 0,$$

$$f(x) - u_0''(x) \int_0^1 \left[ a(y) \left( 1 + \frac{c}{a(y)} \right) - a(y) \right] dy = 0,$$

$$f(x) = u_0''(x) \left[ \int_0^1 a(y) dy + \int_0^1 a(y) \frac{c}{a(y)} dy - \int_0^1 a(y) dy \right],$$

$$f(x) = u_0''(x) \int_0^1 c dy,$$

$$f(x) = c \cdot u_0''(x),$$

$$f(x) = -(a_0 \cdot u_0'(x))',$$

$$f(x) = -a_0 \cdot u_0''(x), \tag{4.18}$$

kde  $a_0$  je takzvaný zhomogenizovaný koeficient:

$$a_0 = \frac{1}{\int_0^1 \frac{1}{a(t)} dt} = -c. \quad (4.19)$$

Dostali jsme tak rovnici, z níž již lze získat funkci  $u_0(x)$ , kterou nazvěme limitní řešení úlohy (4.1).

Nyní se vraťme k třetí rovnici (4.9)

$$-A_0(u_2) = A_2(u_0) + A_1(u_1) - f(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_0}{\partial x}(x) \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial y}(x, y) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) \right) - f(x).$$

Po dosazení z rovnic (4.11), (4.17) a (4.18) získáme

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) \right) = -a(y) \cdot u_0''(x) - a(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( -u_0'(x) \cdot \chi'(y) \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \cdot \left( -u_0''(x) \cdot \chi(y) + \varphi'(x) \right) \right] + a_0 \cdot u_0''(x).$$

Proveďme derivace ve všech členech na pravé straně rovnice:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) \right) = -a(y) \cdot u_0''(x) + a(y) \cdot u_0''(x) \cdot \chi'(y) + u_0''(x) (a(y) \cdot \chi(y))' - \varphi'(x) \cdot a'(y) + a_0 \cdot u_0''(x)$$

a vytkneme  $u_0''(x)$  ze všech členů, ve kterých je to možné:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) \right) = u_0''(x) \cdot \left[ -a(y) + a(y) \cdot \chi'(y) + (a(y) \cdot \chi(y))' + a_0 \right] - \varphi'(x) \cdot a'(y).$$

Dosaďme nyní za  $\chi'(y)$  z rovnice (4.15)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) \right) = u_0''(x) \cdot \underbrace{\left[ -a(y) + a(y) \cdot \left( 1 + \frac{c}{a(y)} \right) + a_0 + (a(y) \cdot \chi(y))' \right]}_{=0} - \varphi'(x) \cdot a'(y),$$

tím dostáváme tvar

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) \right) = u_0''(x) \cdot (a(y) \cdot \chi'(y))' - \varphi'(x) \cdot a'(y). \quad (4.20)$$

Hledejme nyní jedno z řešení ve tvaru

$$\tilde{u}_2(x, y) = u_0''(x) \cdot Q(y) - \varphi'(x) \cdot \alpha(y),$$

kde

$$\begin{aligned} Q(0) &= Q(1), \\ Q'(0) &= Q'(1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= \alpha(1), \\ \alpha'(0) &= \alpha'(1). \end{aligned}$$

Derivace podle  $y$  potom bude

$$\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial y}(x, y) = u_0''(x) \cdot Q'(y) - \varphi'(x) \cdot \alpha'(y).$$

Dosazením do (4.20) získáme

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot u_0''(x) \cdot Q'(y) - a(y) \cdot \varphi'(x) \cdot \alpha'(y) \right) = u_0''(x) \cdot (a(y) \cdot \chi'(y))' - \varphi'(x) \cdot a'(y),$$

po úpravě levé strany

$$u_0''(x) (a(y) \cdot Q'(y))' - \varphi'(x) (a(y) \cdot \alpha'(y))' = u_0''(x) \cdot (a(y) \cdot \chi'(y))' - \varphi'(x) \cdot a'(y).$$

Tato rovnost bude platit, pokud

$$u_0''(x) (a(y) \cdot Q'(y))' = u_0''(x) \cdot (a(y) \cdot \chi'(y))' \quad (4.21)$$

a

$$\varphi'(x) (a(y) \cdot \alpha'(y))' = \varphi'(x) \cdot a'(y). \quad (4.22)$$

Vyřešme nyní (4.21):

$$\begin{aligned} a(y) \cdot Q'(y) &= a(y) \cdot \chi(y) + k_1 \\ Q'(y) &= \chi(y) + \frac{k_1}{a(y)} \\ Q(y) &= \int_0^y \chi(t) dt + \int_0^y \frac{k_1}{a(t)} dt + k_2 \end{aligned}$$

Obdobně vyřešme (4.22):

$$\begin{aligned} a(y) \cdot \alpha'(y) &= a(y) + l_1 \\ \alpha'(y) &= 1 + \frac{l_1}{a(y)} \\ \alpha(y) &= y + \int_0^y \frac{l_1}{a(t)} dt + l_2 \end{aligned}$$

Dostáváme tak hledané řešení ve tvaru

$$u_2(x, y) = u_0''(x) \cdot Q(y) - \varphi'(x) \cdot \alpha(y) + \psi(x).$$

Díky tomu, že hledáme řešení splňující  $Q(0) = Q(1)$  a  $\alpha(0) = \alpha(1)$ , můžeme se pokusit nalezené řešení dále upravit: z  $Q(0) = Q(1)$  plyne:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \chi(t) dt + \int_0^1 \frac{k_1}{a(t)} dt, \\ k_1 &= -\frac{\int_0^1 \chi(t) dt}{\int_0^1 \frac{1}{a(t)} dt}, \\ k_1 &= -a_0 \cdot \int_0^1 \chi(t) dt; \end{aligned} \tag{4.23}$$

z  $\alpha(0) = \alpha(1)$  plyne:

$$\begin{aligned} 0 &= 1 + \int_0^1 \frac{l_1}{a(t)} dt, \\ l_1 &= -a_0, \\ l_1 &= c. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Všimněme si, že  $\alpha(y) = \chi(y)$ , proto získáváme nový tvar řešení

$$u_2(x, y) = u_0''(x) \cdot Q(y) - \varphi'(x) \cdot \chi(y) + \psi(x). \tag{4.25}$$

#### 4.4.4 Čtvrtá rovnice

Nyní z úlohy (4.10) získáme předpis pro  $\varphi(x)$ , který potřebujeme dosadit do (4.17). K tomu využijeme nutnou a postačující podmínku.

Aby tato podmínka byla splněna, musí platit

$$\int_0^1 \left[ -A_2(u_1) - A_1(u_2) \right] dy = 0,$$

neboli

$$\int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_1}{\partial x}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial y}(x, y) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial u_2}{\partial x}(x, y) \right) \right] dy = 0.$$



Dosaďme z (4.17) a (4.25):

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (-u'_0(x) \cdot \chi(y) + \varphi(x)) \right) \right] dy + \\
&+ \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( a(y) \cdot \frac{\partial}{\partial y} (u''_0(x) \cdot Q(y) - \varphi'(x) \cdot \chi(y) + \psi(x)) \right) \right] dy + \\
&+ \int_0^1 \left[ \frac{\partial}{\partial y} \left( a(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (u''_0(x) \cdot Q(y) - \varphi'(x) \cdot \chi(y) + \psi(x)) \right) \right] dy,
\end{aligned}$$

upravme

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \left[ a(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (-u''_0(x) \cdot \chi(y) + \varphi'(x)) \right] dy + \\
&+ \int_0^1 \left[ a(y) \cdot \frac{\partial}{\partial x} (u''_0(x) \cdot Q'(y) - \varphi'(x) \cdot \chi'(y)) \right] dy + \\
&+ \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left[ a(y) \left( u'''_0(x) \cdot Q(y) - \varphi''(x) \cdot \chi(y) + \psi'(x) \right) \right] dy,
\end{aligned}$$

opět zderivujeme

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^1 \left[ a(y) \cdot (-u'''_0(x) \cdot \chi(y) + \varphi''(x)) \right] dy + \\
&+ \int_0^1 \left[ a(y) \cdot (u'''_0(x) \cdot Q'(y) - \varphi''(x) \cdot \chi'(y)) \right] dy + \\
&+ u'''_0(x) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} (a(y) \cdot Q(y)) dy}_{=0} - \varphi''(x) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} (a(y) \cdot \chi(y)) dy}_{=0} + \psi'(x) \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial a(y)}{\partial y} dy}_{=0}. \\
0 &= u'''_0(x) \int_0^1 \left[ \underbrace{-a(y) \cdot \chi(y) + a(y) \cdot Q'(y)}_{k_1} \right] dy - \varphi''(x) \int_0^1 \left[ \underbrace{-a(y) + a(y) \cdot \chi'(y)}_{l_1} \right] dy, \\
&u'''_0(x) \cdot k_1 - \varphi''(x) \cdot l_1 = 0.
\end{aligned}$$

Dosaďme za  $k_1$  z rovnice (4.23) a  $l_1$  z (4.24)

$$u_0'''(x) \cdot \left[ -a_0 \int_0^1 \chi(t) dt \right] - \varphi''(x) \cdot \left[ -a_0 \right] = 0.$$

Z tohoto tvaru, již není problém nalézt  $\varphi(x)$ , které jsme neznali v rovnici (4.17)

$$\begin{aligned} \varphi''(x) &= \left( \int_0^1 \chi(t) dt \right) \cdot u_0'''(x) \\ &\Downarrow \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \left( \int_0^1 \chi(t) dt \right) \cdot u_0''(x) + p \\ &\Downarrow \end{aligned} \tag{4.27}$$

$$\varphi(x) = \left( \int_0^1 \chi(t) dt \right) \cdot u_0'(x) + px + q \tag{4.28}$$

Nyní se můžeme vrátit k (4.17) a dosadit z (4.28):

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= -u_0'(x) \cdot \chi(y) + u_0'(x) \int_0^1 \chi(t) dt + px + q, \\ u_1(x, y) &= -u_0'(x) \cdot \left[ \chi(y) - \int_0^1 \chi(t) dt \right] + px + q. \end{aligned}$$

Opět využijme okrajových podmínek  $u_1(0, 0) = u_1(1, 0)$

$$\begin{aligned} u_1(0, 0) &= u_1(1, 0) \\ -u_0'(0) \left[ 0 - \int_0^1 \chi(t) dt \right] + q &= -u_0'(1) \left[ 0 - \int_0^1 \chi(t) dt \right] + p + q \end{aligned} \tag{4.29}$$

Jelikož  $u_0(0) = u_0(1)$  jednoduše získáme z rovnice (4.29) hodnotu integrační konstanty  $p$ , tzn.

$$p = 0.$$

Dále potřebujeme zjistit hodnotu konstanty  $q$

$$\begin{aligned}
 u_1(0,0) &= 0 \\
 &\Downarrow \\
 -u'_0(0) \left[ 0 - \int_0^1 \chi(t) dt \right] + q &= 0 \\
 &\Downarrow \\
 -u'_0(0) \int_0^1 \chi(t) dt &= q.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Tím jsme získali tvar rovnice (4.17)

$$u_1(x, y) = -u'_0(x) \cdot \left( \chi(y) - \int_0^1 \chi(t) dt \right) - u'_0(0) \cdot \left( \int_0^1 \chi(t) dt \right) \tag{4.31}$$

## 4.5 Shrnutí

Řešení  $u_\varepsilon$  úlohy (4.1) asymptotickou expanzí (viz. 4.2) aproximujeme takto:

$$u_\varepsilon(x) \doteq u_0(x) + \varepsilon \cdot u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) =: \tilde{u}_\varepsilon(x), \tag{4.32}$$

kde:

$u_0(x)$  je řešením úlohy

$$\begin{cases} -(a_0 \cdot u'_0(x))' = f(x), \\ u_0(0) = u_0(1) = 0, \end{cases}$$

a

$$u_1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}\right) = -u'_0(x) \cdot \left( \chi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) - \int_0^1 \chi(t) dt \right) - u'_0(0) \cdot \left( \int_0^1 \chi(t) dt \right).$$

## 4.6 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků (MKP) je numerická metoda, převádějící úlohu na soustavu lineárních rovnic. Řešení této soustavy dává pak přibližné řešení původní úlohy. Se zvyšujícím se počtem dílků na intervalu se celkové řešení blíží analytickému řešení. (Odvození a vysvětlení nalezneme v [3].)

Využijeme-li odvození metody konečných prvků v [3] zjistíme, že pro náš případ lokální matice tuhosti má tvar:

$$\mathbf{A}_i = \frac{\int_i^{i+1} a(x) dx}{h} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Kapitola 5

# Numerické experimenty

V této kapitole jsou na příkladech ukázány právě vysvětlené metody a porovnávány výsledky. Zavedme proto druhy chyb, které budeme porovnávat.

### Supremová norma chyby

Mějme vektory  $u_1$  a  $u_2$ , jejichž prvky odpovídají funkčním hodnotám porovnávaných funkcí na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Relativní supremovou normou chyby označme

$$\frac{\max_i |u_1(x_i) - u_2(x_i)|}{\max_i |u_1(x_i)|},$$

kde porovnáváme závislost chyby  $u_1$  na  $u_2$ .

### $L^2$ norma chyby

Mějme vektory  $u_1$  a  $u_2$ , jejichž prvky odpovídají funkčním hodnotám porovnávaných funkcí na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Relativní  $L^2$  normu chyby označme

$$\sqrt{\frac{\sum_i \left(u_1(x_i) - u_2(x_i)\right)^2}{\sum_i \left(u_1(x_i)\right)^2}}$$

kde porovnáváme závislost chyby  $u_1$  na  $u_2$ .

## 5.1 Příklad 1

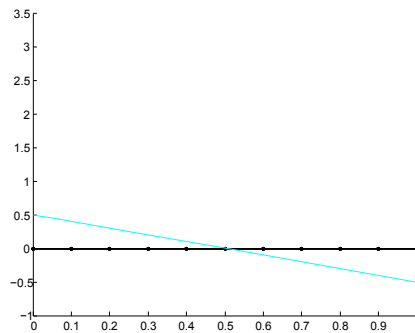
Řešme úlohu (4.1) s okrajovými podmínkami  $u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0$ , kde máme zadány funkce

$$\begin{aligned} a(x) &= 2 + \sin(2 \cdot \pi \cdot x), \\ f(x) &= \frac{1}{2} - x. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Nejprve se podívejme na zadané funkce, jestli splňují potřebné vlastnosti. Vzhledem k tomu, že se jedná o elementární funkce, podívejme se pouze na jejich grafy na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$ .

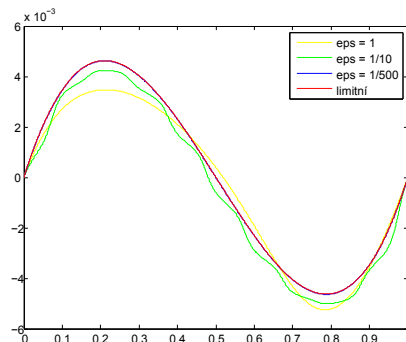
Funkci  $a(x)$  jsme již měli na obrázku (2.1), a je zřejmé, že všechny vlastnosti splňuje. Tedy je hladká, 1-periodická, a současně  $\exists \bar{a} \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}: a(x) \geq \bar{a} > 0$ .

Funkce zatížení  $f(x)$  je na následujícím obrázku (5.1), opět ihned vidíme, že  $\int_0^1 \frac{1}{2} - x dx = 0$ .



Obrázek 5.1: Funkce zatížení.

Pomocí MKP s dělením intervalu na 5000 dílků vypočteme a graficky znázorníme řešení pro  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{10}$  a  $\varepsilon = \frac{1}{500}$  a porovnejme s limitním řešením  $u_0$  (viz. 4.18).



Obrázek 5.2: Výsledky pro různá  $\varepsilon$ .

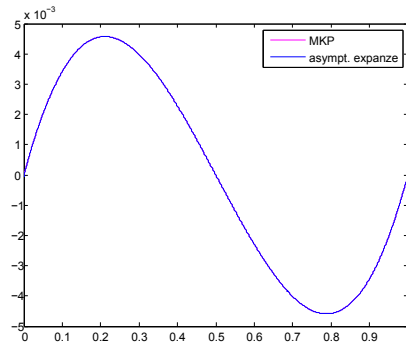
Již z grafů vidíme, že jednotlivé křivky se od sebe poměrně liší. Budeme-li brát limitní řešení jako případ, kdy materiál vykazuje vlastnosti homogenního materiálu, můžeme říct,

že materiály s vyšším  $\varepsilon$  nevykazují homogenitu tak, jak materiály s nižším  $\varepsilon$ . Ke stejným závěrům můžeme dojít také z následující tabulky.

<b>Porovnání <math>u_0</math> a <math>u_\varepsilon</math></b>		
$\varepsilon$	Supremová norma	$L^2$ norma
1	0.2501	0.1784
$\frac{1}{5}$	0.2522	0.2474
$\frac{1}{10}$	0.1503	0.1262
$\frac{1}{50}$	0.0342	0.0254
$\frac{1}{100}$	0.0174	0.0127
$\frac{1}{250}$	0.0070	0.0052
$\frac{1}{500}$	0.0036	0.0027

Nyní řešme úlohu (4.1) se zadáním (5.1) pomocí asymptotické expanze, najdeme řešení  $\tilde{u}_\varepsilon$  (viz. 4.32).

Na obrázku (5.3) můžeme vidět grafická řešení  $u_{\frac{1}{500}}$  (MKP) a  $\tilde{u}_{\frac{1}{500}}$  (asymptotická expanze),



Obrázek 5.3: Porovnání  $\tilde{u}_\varepsilon$  a  $u_\varepsilon$ .

<b>Porovnání <math>u_\varepsilon</math> a <math>\tilde{u}_\varepsilon</math></b>		
$\varepsilon$	Supremová norma	$L^2$ norma
1	$6.5540 \cdot 10^{-1}$	$8.2800 \cdot 10^{-1}$
$\frac{1}{5}$	$3.1600 \cdot 10^{-2}$	$1.9400 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{10}$	$8.7000 \cdot 10^{-3}$	$4.9000 \cdot 10^{-3}$
$\frac{1}{50}$	$3.7680 \cdot 10^{-4}$	$1.9413 \cdot 10^{-4}$
$\frac{1}{100}$	$1.2771 \cdot 10^{-4}$	$5.6055 \cdot 10^{-5}$
$\frac{1}{250}$	$1.3116 \cdot 10^{-4}$	$7.2568 \cdot 10^{-5}$
$\frac{1}{500}$	$2.5084 \cdot 10^{-4}$	$1.3144 \cdot 10^{-4}$

V této tabulce vidíme, že rozdíly mezi řešeními jsou v řádech desetitisícin. Můžeme předpokládat, že jsou způsobeny především aproximací  $\tilde{u}_\varepsilon$ .

## 5.2 Příklad 2

Řešme úlohu (4.1) s okrajovými podmínkami  $u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0$ , kde máme zadány funkce

$$\begin{aligned} a(x) &= 2 + \sin(2\pi x), \\ f(x) &= \cos(\pi x), \end{aligned}$$

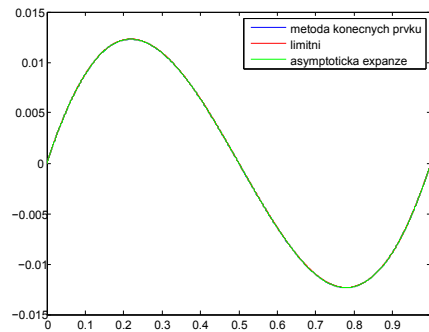
Funkce  $a(x)$  je stejná jako v předchozím příkladu (5.1), ověříme pouze nutnou a postačující podmínku:

$$\int_0^1 \cos(\pi \cdot x) dx = \left[ \frac{\sin(\pi x)}{\pi} \right]_0^1 = \frac{\sin(\pi)}{\pi} - \frac{\sin(0)}{\pi} = 0, \quad (5.2)$$

podmínka řešitelnosti úlohy je splněna.

Pro metodu konečných prvků využijme dělení intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  na 2500 dílů.

Na obrázku (5.4) vidíme grafické porovnání  $u_0$  (limitní),  $u_{\frac{1}{500}}$  (metoda konečných prvků) a  $\tilde{u}_{\frac{1}{500}}$  (asymptotická expanze).



Obrázek 5.4: Řešení pro nelineární  $f(x)$ .

Pro porovnání přesnosti jednotlivých metod v následující tabulce vidíme, že opět s menším  $\varepsilon$  kompozit více vykazuje vlastnosti homogenního materiálu.

**Porovnání  $u_0$  a  $u_\varepsilon$**

$\varepsilon$	Supremová norma	$L^2$ norma
1	0.2589	0.1848
$\frac{1}{5}$	0.2424	0.2318
$\frac{1}{10}$	0.1411	0.1168
$\frac{1}{50}$	0.0314	0.0234
$\frac{1}{100}$	0.0159	0.0117
$\frac{1}{250}$	0.0064	0.0048
$\frac{1}{500}$	0.0033	0.0025

**Porovnání  $u_\varepsilon$  a  $\tilde{u}_\varepsilon$** 

$\varepsilon$	Supremová norma	$L^2$ norma
1	$5.6810 \cdot 10^{-1}$	$6.9580 \cdot 10^{-1}$
$\frac{1}{5}$	$2.5100 \cdot 10^{-2}$	$1.7700 \cdot 10^{-2}$
$\frac{1}{10}$	$6.7000 \cdot 10^{-3}$	$4.4000 \cdot 10^{-3}$
$\frac{1}{50}$	$2.9499 \cdot 10^{-4}$	$1.7883 \cdot 10^{-4}$
$\frac{1}{100}$	$1.0455 \cdot 10^{-4}$	$5.1884 \cdot 10^{-5}$
$\frac{1}{250}$	$1.1883 \cdot 10^{-4}$	$6.7411 \cdot 10^{-5}$
$\frac{1}{500}$	$2.2922 \cdot 10^{-4}$	$1.2285 \cdot 10^{-4}$

Opět vidíme, že řešení  $u_\varepsilon$  a  $\tilde{u}_\varepsilon$  jsou si velice blízká.

### 5.3 Příklad 3

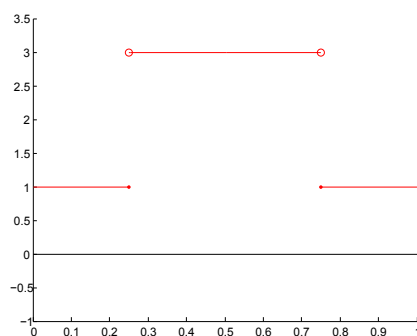
Řešme úlohu (4.1) s okrajovými podmínkami  $u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0$ , kde máme zadány funkce

$$f(x) = \frac{1}{2} - x,$$

a  $a(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , která je 1-periodická a pro kterou platí:

$$a(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{1}{4} \rangle, \\ 3 & \text{pro } x \in \langle \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \rangle, \\ 1 & \text{pro } x \in \langle \frac{3}{4}, 1 \rangle. \end{cases}$$

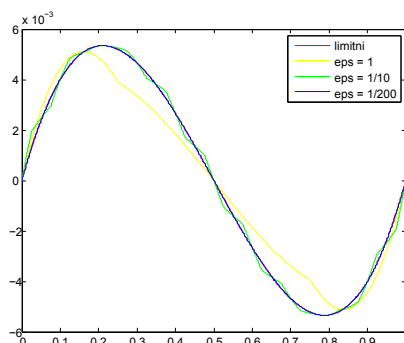
Funkce  $a(x)$  na intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  vypadá takto:



Obrázek 5.5: Jedno opakování  $a(x)$  na  $\langle 0, 1 \rangle$ .

Nalezneme řešení pomocí metody konečných prvků  $u_\varepsilon$ , s dělení intervalu na 4869 dílů<sup>1</sup>, a porovnejme s limitním řešením  $u_0$ .



Obrázek 5.6: Výsledky nespojitě  $a(x)$  pro různá  $\varepsilon$ .

Grafické porovnání řešení pomocí MKP  $u_\varepsilon$  pro  $\varepsilon = 1$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ,  $\varepsilon = \frac{1}{200}$  s limitním řešením  $u_0$  na obrázku.

Konkrétní chyby pro různá  $\varepsilon$  opět porovnejme v tabulce. I v tomto případě vidíme, že při nižším  $\varepsilon$  se materiál víc jeví jako homogenní.

**Porovnání  $u_0$  a  $u_\varepsilon$** 

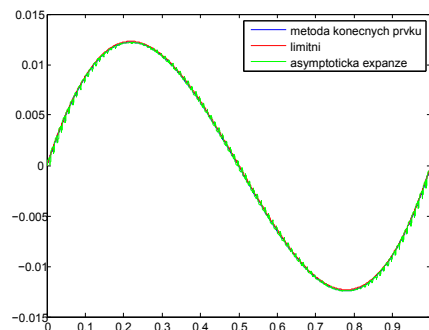
$\varepsilon$	Supremová norma	$L^2$ norma
1	0.2470	0.1995
$\frac{1}{5}$	0.2160	0.1063
$\frac{1}{10}$	0.1197	0.0486
$\frac{1}{100}$	0.0132	0.0047
$\frac{1}{200}$	0.0074	0.0025
$\frac{1}{400}$	0.0041	0.0014

Nalezneme nyní řešení pomocí asymptotické expanze. Na obrázku (5.7) vidíme grafické řešení ( $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ) pro  $u_0$  (limitní),  $u_\varepsilon$  (metoda konečných prvků) a  $\tilde{u}_\varepsilon$  (asymptotická expanze).

**Porovnání  $u_\varepsilon$  a  $\tilde{u}_\varepsilon$** 

$\varepsilon$	Supremová norma	$L^2$ norma
1	6.1522	3.3857
$\frac{1}{5}$	1.1782	0.4733
$\frac{1}{10}$	0.5885	0.2376
$\frac{1}{100}$	0.0640	0.0238
$\frac{1}{250}$	0.0356	0.0106
$\frac{1}{500}$	0.0137	0.0049

<sup>1</sup>Takové dělení musíme zvolit proto, že „skoky“ mezi funkčními hodnotami funkce  $a(x)$  při nižším epsilon vychází opakovaně na stejnou hodnotu, a tak zvyšují chybu řešení.

Obrázek 5.7: Porovnání  $u_0$ ,  $u_\varepsilon$  a  $\tilde{u}_\varepsilon$ .

## 5.4 Příklad 4

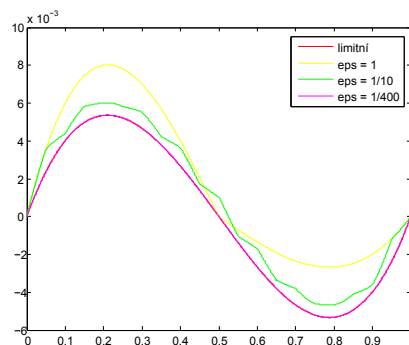
Dále se podíváme na případ, kdy  $a(x)$  nebude 1-periodická. Řešme úlohu (4.1) s okrajovými podmínkami  $u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0$ , kde

$$a(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle k, \frac{1}{2} + k \right\rangle, \\ 3 & \text{pro } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( \frac{1}{2} + k, 1 + k \right). \end{cases}$$

a

$$f(x) = \frac{1}{2} - x$$

Řešení metodou konečných prvků pro  $N = 4869$  v porovnání s  $u_0$  je na obrázku (5.8):

Obrázek 5.8: Výsledky pro nespojitě  $a(x)$ , která není 1-periodická.

**Porovnání  $u_\varepsilon$  a  $\tilde{u}_\varepsilon$** 

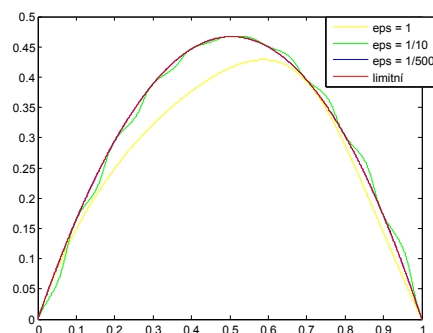
$\varepsilon$	Supremová norma	$L^2$ norma
1	0.5002	0.5001
$\frac{1}{5}$	0.3747	0.3656
$\frac{1}{10}$	0.2221	0.1855
$\frac{1}{100}$	0.0251	0.0169
$\frac{1}{200}$	0.0147	0.0117
$\frac{1}{400}$	0.0076	0.0062

## 5.5 Příklad 5

Pokusme se najít řešení pro  $f(x)$  nesplňující nutnou a postačující podmínku řešitelnosti úlohy. Řešme úlohu (4.1) s okrajovými podmínkami  $u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0$ , kde

$$\begin{aligned} a(x) &= 2 + \sin(2\pi x), \\ f(x) &= 6 + \sin(x). \end{aligned}$$

Na grafickém řešení (5.9) a následné tabulce vidíme, že řešení metodou konečných prvků ( $N = 2500$ ) se opět přibližuje limitnímu řešení.

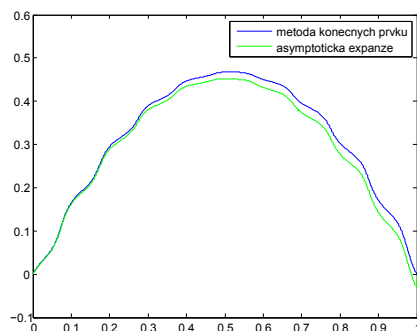


Obrázek 5.9: Výsledky pro  $f(x)$  nesplňující nutnou a postačující podmínku.

**Porovnání  $u_0$  a  $u_\varepsilon$** 

$\varepsilon$	Supremová norma	$L^2$ norma
1	0.1531	0.1174
$\frac{1}{5}$	0.1099	0.0640
$\frac{1}{10}$	0.0615	0.0325
$\frac{1}{50}$	0.0135	0.0065
$\frac{1}{100}$	0.0068	0.0033
$\frac{1}{250}$	0.0028	0.0013
$\frac{1}{500}$	0.0014	$6.6353 \cdot 10^{-4}$

Podívejme se ovšem, jak to dopadne v případě, že budeme hledat řešení  $\tilde{u}_\varepsilon$  asymptotickou expanzí. Na obrázku (5.10) vidíme porovnání s MKP, pro  $\varepsilon = 50$ .

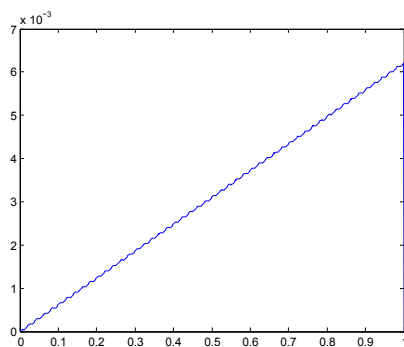


Obrázek 5.10: Grafy  $u_\varepsilon$  a  $\tilde{u}_\varepsilon$  pro  $f(x)$  nesplňující nutnou a postačující podmínku.

**Porovnání  $u_\varepsilon$  a  $\tilde{u}_\varepsilon$**

$\varepsilon$	Supremová norma	$L^2$ norma
1	0.7246	0.4638
$\frac{1}{5}$	0.1333	0.1019
$\frac{1}{10}$	0.0664	0.0518
$\frac{1}{50}$	0.0133	0.0105
$\frac{1}{100}$	0.0067	0.0053
$\frac{1}{250}$	0.0027	0.0021
$\frac{1}{500}$	0.0014	0.0011

V tomto případě vidíme, že chyby mezi řešením  $u_\varepsilon$  a  $\tilde{u}_\varepsilon$  jsou poměrně velké, a jak vidíme také z grafu výskytu chyb na obrázku (5.11), absolutní chyba  $u_\varepsilon$  a  $\tilde{u}_\varepsilon$  se postupně zvyšuje.



Obrázek 5.11: Šíření chyby  $\tilde{u}_\varepsilon$  od  $u_\varepsilon$ .

## Kapitola 6

### Závěr

Cílem této práce bylo sledovat, za jakých předpokladů kompozitní materiál vykazuje vlastnosti homogenního materiálu. Byly vytvořeny úlohy, na jejichž řešení jsme sledovali, kdy k tomuto jevu dochází.

Zjistili jsme, že pokud se má kompozitní materiál jevit jako homogenní, je nutné, aby funkce popisující vlastnosti tohoto materiálu měla periodickou strukturu, a také, aby se na zkoumaném intervalu  $\langle 0, 1 \rangle$  opakovala pokud možno co nejvícekrát. Ve všech zkoumaných případech jsme výsledné hodnoty porovnávali s řešením  $u_0$ , o kterém jsme mohli říct, že se kompozit jeví jako homogenní materiál. Zjistili jsme, že pro hodnoty  $\varepsilon \leq \frac{1}{250}$  (tedy  $\varepsilon \leq 0,004$ ) relativní chyby (jak supremové normy, tak  $L^2$  normy) byly menší než 1%.

Dále jsme zjišťovali, jak se mezi sebou liší řešení získána pomocí metody konečných prvků a pomocí asymptotické expanze. I přes aproximaci funkce  $\tilde{u}_\varepsilon$  byla čísla velice blízká (relativní chyby v setinách procent). Což je uspokojivé, vzhledem k výpočetním nárokům jednotlivých metod mezi sebou. Metodou konečných prvků je nutné opakovaně hledat řešení úlohy při změně  $\varepsilon$ , kdežto asymptotickou expanzí stačí vynásobit číslem  $\varepsilon$  již známý předpis.

# Literatura

- [1] D. Cioranescu, P. Donato: *An Introduction to Homogenization*, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, 17
- [2] J. Bouchala, *Rukou psané zápisy z přednášek*
- [3] T. Kozubek, T. Brzobohatý, V. Hapla, M. Jarošová, A. Markopoulos, *Lineární algebra s MatLabem*, Ostrava 2011, Skriptum VŠB-TU Ostrava a ZČU v Plzni.

# Přílohy

Příloha na CD obsahuje tyto MatLabovské funkce:

*bak\_limitni.m* - metoda vrací vektor délky  $N$ , reprezentující řešení  $u_0$  a vykresluje do figure grafické řešení  $u_0$

*bak\_MKP.m* - metoda vrací vektor délky  $N$ , reprezentující řešení  $u_\varepsilon$  a vykresluje do figure grafické řešení  $u_\varepsilon$

*bak\_epsilonove.m* - metoda vrací vektor délky  $N$ , reprezentující řešení  $\tilde{u}_\varepsilon$  a vykresluje do figure grafické řešení  $\tilde{u}_\varepsilon$

*supNorma.m* - metoda vrací relativní supremovou normu chyby porovnávaných vektorů stejné délky

*L2norma.m* - metoda vrací relativní  $L^2$  normu chyby porovnávaných vektorů stejné délky